$ax^2 + bx + c = 0$

1) $D = b^2 - 4ac$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{2a}$

3) $x_1 \cdot x_2 = c$ $\qquad x_1 + x_2 = -b$

4) $a + b + c = 0$ $\qquad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$

# قوانين الرياضيات

2021

أ. غشام

قدرات وتحصيلي Ghasham_22

تحصيلي Ghasham22

قدرات Ghasham23



وسيتم حل جميع الاسئلة على قناة التجميعات والاختبار المقنن

للانضمام لقنوات أ. غشام اضغط على أيقونة القناة التي تريد أن تنضم اليها

















## العبارات المنطقية

▪ عبارة الوصل $(p \wedge q)$ : عبارة مركبة تربط عبارتين بأداة الربط " و "

▪ عبارة الفصل $(p \vee q)$ : عبارة مركبة تربط عبارتين بأداة الربط " أو "

▪ العبارة الشرطية $(p \longrightarrow q)$ : عبارة تكتب على الصورة إذا كان ..... فإن.....

قيم الصواب للعبارات

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \longrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |

## ▪ العبارات الشرطية المرتبطة :

| العبارة الشرطية | العكس | المعكوس | المعاكس الايجابي |
|---|---|---|---|
| $p \longrightarrow q$ | $q \longrightarrow p$ | $\sim p \longrightarrow \sim q$ | $\sim q \longrightarrow \sim p$ |

▪ الزوايتان المتتامتان : مجموع قياسيهما $90^\circ$

▪ الزوايتان المتجاورتان : لهما الرأس نفسه ، وبينهما ضلع مشترك ، وعلى جهتي الضلع المشترك

▪ الزوايتان المتكاملتان : مجموع قياسيهما $180^\circ$

▪ الزوايتان المتقابلتان بالرأس : لهما الرأس نفسه ، وكل ضلع من أحدهما هو امتداد لضلع من الأخرى ، ومتطابقتان







# التوازي والتعامد

- إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن
  - كل زاويتين متناظرتين متطابقتين
  - كل زاويتين متبادلتين داخليا أو خارجياً متطابقتين
  - كل زاويتين متحالفتين متكاملتين

| زوايتان متناظرتان | زوايتان متبادلتان داخليا | زوايتان متبادلتان خارجياً | زوايتان متحالفتان |
|---|---|---|---|
| $\angle 1, \angle 6$ | $\angle 3, \angle 5$ | $\angle 2, \angle 8$ | $\angle 3, \angle 6$ |
| داخلية و خارجية في جهة واحدة من القاطع | داخليتان في جهتين من القاطع | خارجيتان في جهتين من القاطع | داخليتان أو خارجيتان في جهة واحدة من القاطع |

- ميل المستقيم الذي يحوي النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
  هو نسبة الإرتفاع الرأسي إلى المسافة الأفقية

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

| الميل موجب | الميل سالب | الميل يساوي صفر | الميل غير معروف |
|---|---|---|---|

- يتوازى المستقيمان ⟺ الميل نفسة $(m_1 = m_2)$
- يتعامد المستقيمان ⟺ حاصل ضرب ميليهما $= -1$








## ▪ معادلة الخط المستقيم :

| ▪ المستقيم الرأسي | ▪ صيغة المقطعين السيني والصادي | ▪ صيغة الميل ونقطة | ▪ صيغة الميل والمقطع الصادي |
|---|---|---|---|
| $x = a$ | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ | $y - y_1 = m(x - x_1)$ | $y = mx + b$ |
| ▪ المستقيم الأفقي $y = b$ | $a$ المقطع السيني $b,$ المقطع الصادي | $m$ الميل $(x_1, y_1)$ أي نقطة على المستقيم | $m$ الميل $b$ المقطع الصادي |

## ▪ صيغ البعد :

| ▪ منتصف قطعة مستقيم | ▪ البعد بين مستقيمين متوازيين | ▪ البعد بين نقطة $(x_1, y_1)$ ومستقيم $ax + by + c = 0$ | ▪ البعد بين نقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ |
|---|---|---|---|
| $M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$ | $ax + by + c = 0$<br>$ax + by + d = 0$<br>$d = \frac{\lvert c - d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $d = \frac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ |

## الأشكال الرباعية

- مجموع قياسات الزوايـا الداخلية لمضلع محدب = $(n - 2) \times 180$ حيث $n$ هي عدد الأضلاع
- مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع محدب (زاوية واحدة عند كل رأس) يساوي $360°$
- قياس زاوية داخلية في المضلع المنتظم = $\frac{(n-2)\times 180}{n}$
- في مضلع منتظم عدد أضلاعه $n$ قياس الزاوية الخارجية = $\frac{360}{n}$

=

- عدد الأضلاع = $\frac{360+\theta}{180}$ ، $\theta$ مجموع قياسات الزوايا الداخلية
- عدد الأضلاع = $\frac{360}{180-\theta}$ ، $\theta$ قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم

- خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين :-
  - القطران متطابقان
  - زاويتا كل قاعدة متطابقتان





## النسبة و التشابه

▪ مفهوم أساسي : التناسب

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftarrow a.d=c.b$

▪ مقياس الرسم = $\frac{\text{المسافة على الرسم}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

▪ التغير الطردي : $y=kx$ ويكون $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$

▪ التغير المشترك : إذا كانت ( $y$ تتغير طردياً مع $x\cdot z$ ) فإن $y=kx\cdot z$ ويكون $\frac{y_1}{x_1\cdot z_1}=\frac{y_2}{x_2\cdot z_2}$

▪ في التمدد

الطول في الصورة = معامل التمدد × الطول في الأصـــل

معامل التمدد = $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصـــل}}$

▪ التغير العكسي: $y\cdot x=k$ ويكون $y_1\cdot x_1=y_2\cdot x_2$

▪ التغير المركب : لتكن ( $y$ تتغير طردياً مع $x$ وعكسياً مع $z$) إذاً $y\cdot z=kx$ ويكون $\frac{y_1\cdot z_1}{x_1}=\frac{y_2\cdot z_2}{x_2}$

▪ إذا تشابه مثلثين فإن

▪ النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين أضلاعهما المتناظرة

▪ النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع النسبة بين الأضلاع المتناظرة

▪ حالات تشابه مثلثين:-

$(SSS)$. إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين.

$(SAS)$ إذا تناسب ضلعين وتطابقت الزاوية المحصورة

$(AA)$ إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر

▪ الدوران :

| الدوران | النقطة | الصورة |
|---|---|---|
| زاوية $90^\circ$ | $(x,y)$ | $(-y,x)$ |
| زاوية $180^\circ$ | $(x,y)$ | $(-x,-y)$ |
| زاوية $270^\circ$ | $(x,y)$ | $(y,-x)$ |

دوران بزاوية $-90^\circ$ يساوي دوران بزاوية $270^\circ$

دوران بزاوية $-270^\circ$ يساوي دوران بزاوية $90^\circ$

دوران بزاوية $-180^\circ$ يساوي دوران بزاوية $180^\circ$

▪ تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين هو دوران زاويته ضعف الزاوية التي بين المستقيمين

▪ الانعكاسات في المستوى :-

| الإنعكاس | النقطة | صورتها |
|---|---|---|
| حول محور $x$ | $(a,b)$ | $(a,-b)$ |
| حول محور $y$ | $(a,b)$ | $(-a,b)$ |
| حول نقطة الأصل | $(a,b)$ | $(-a,-b)$ |
| حول المستقيم $y=x$ | $(a,b)$ | $(b,a)$ نبدل الاحداثيات |

▪ تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين هو انسحاب ومقداره ضعف المسافة بين المتوازيين











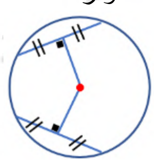


## الدائرة

▪ الوتران المتطابقين في دائرة

• لهما البعد نفسه عن المركز • يتطابق قوساهما.

▪ إذا عامد نصف القطر وترا في دائرة فإنه ينصف الوتر وينصف قوسه أيضاً



▪ محيط الدائـرة = $C = 2\,\pi\,r$ أو $= \pi\, dC$

حيث r نصف القطر حيث d هي القطر

قياس الزاوية المركزية في مضلع منتظم $= \frac{360}{\text{عدد الأضلاع}}$

طول القوس: $\frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi r} \Leftarrow L = r \cdot \theta$

$L$ طول القوس r نصف قطر الدائرة

$x^\circ$ قياس الزاوية $\theta$ قياس الزاوية بالراديان

▪ معادلة دائرة مركزها $(h\,,k)$ ونصف قطرها $r$ هي

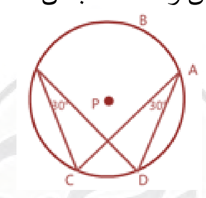
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

▪ منتصف قطعة المستقيم $\overline{AB}$ حيث

هو $M = \left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

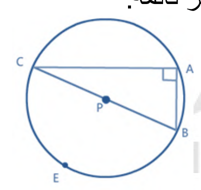
الزوايا المحيطية : هي زاوية رأسها على الدائرة , وضلعيها وتران في الدائرة , وقياسها = نصف قياس القوس المقابل لها

▪الزوايتان المحيطيتان المرسومتان في قوس واحد متطابقتان



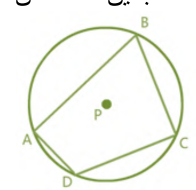

$m\,\overset{\frown}{CD} = 60^\circ$

▪الزاويةالمحيطية المرسومة على القطر قائمة.



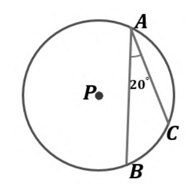

$m\ \overset{\frown}{BEC} = 180^\circ$

▪ في الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين متكاملتان




$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$

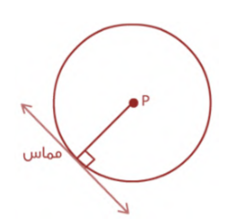
▪ زوايا محيطية




$m\angle CPB = 40$

▪المماس لدائرة عمودي على نصف القطر المار بنقطة التماس

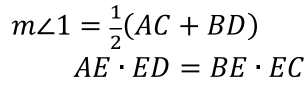





▪ تقاطع وترين في دائرة

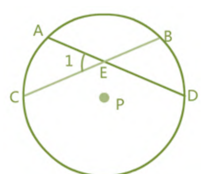






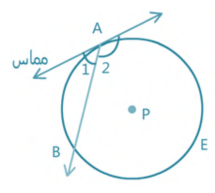
$m\angle 1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$

$AE \cdot ED = BE \cdot EC$



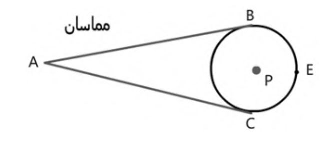

▪ تقاطع مماس وقاطع في دائرة(زاوية مماسية)

$m\angle 1 = \frac{1}{2}\angle APB$




▪ المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان.

AB =AC



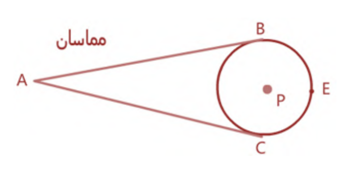








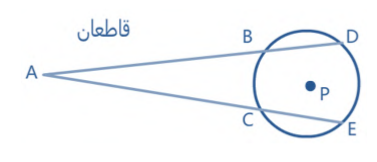
▪ تقاطع مماسين خارج الدائرة




$$m\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC} - \overset{\frown}{BC})$$

▪تقاطع قاطعين خارج الدائرة






$$m\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$$

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE$$

▪تقاطع مماس و قاطع خارج الدائرة




$$m\angle A = \frac{1}{2}[\overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{BC}]$$

$$AB^2 = AC \cdot AD$$








## الدوال والمتباينات

تناظر الدوال

- الدالة الزوجية

متماثلة حول محور $y$

$f(-x) = f(x)$

- الدالة الفردية

متماثلة حول نقطة الأصل

$f(-x) = -f(x)$

- إطار الدوال

متزايدة

متناقصة

ثابتة

- مجال دالة الجذر التربيعي

$\sqrt{h(x)}$ هـو $h(x) \geq 0$

- يوجد للدالة $f$ دالة عكسية $f^{-1}$ إذا وفقط إذا كانت $f$ متباينة

- الاتصال :

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا تحقق:

- $f(c)$ موجودة
- $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

- أنواع عدم الاتصال

- عدم اتصال لا نهائي وتظهر قيمة الدالة على الصورة $\frac{c}{0}$
- نقطي ( قابل للإزالة ) تظهر قيمة الدالة بالشكل $\frac{0}{0}$
- عدم اتصال قفزي وتظهر قيمتين مختلفتين عند نقطةعدم الإتصال







# الدوال الرئيسة (الأم)

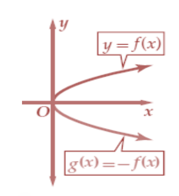
| | | | |
|---|---|---|---|
| الدالة الثابتة<br>$c \in R \ ,\ f(x) = c$ | الدالةالمحايدة<br>$f(x) = x$ | الدالةالتربيعية<br>$f(x) = x^2$ | الدالةالتكعيبية<br>$f(x) = x^3$ |
| دالة الجذر التربيعي<br>$f(x) = \sqrt{x}$ | دالة المقلوب<br>$f(x) = \frac{1}{x}$ | الدالة القيمة الطلقة<br>$f(x) = \lvert x \rvert$ | الدالة الدرجية<br>$f(x) = [x]$ |

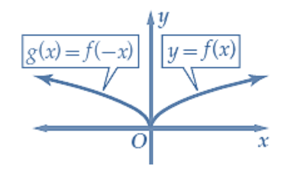
▪ متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

**الإنعكاس حول محوري الإحداثيات**

الإنعكاس حول محور $x$
$g(x) = -f(x)$

الإنعكاس حول محور $y$
$g(x) = f(-x)$

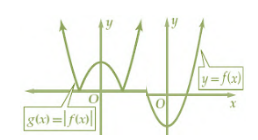


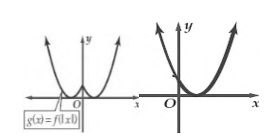




**التحويلات على دوال القيمة المطلقة**

$g(x) = |f(x)|$
انعكاس أي جزء تحت محور **$x$ ليصبح فوقه**

$g(x) = f(|x|)$
يحذف الجزءيسار $y$ ويضع **مكانه صورة الجزء الواقع يمين $y$ بالإنعكاس حول $y$**




▪ خطوط التقارب للدوال الكسرية : $y = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ في أبسط شكل
▪ يوجد خط تقارب رأسي عندما $g(x) = 0, h(x) \neq 0$
▪ إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فإن خط التقارب الأفقي هو (المعامل الرئيسي للمقام)/(المعامل الرئيسي للبسط) $= y$
▪ إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فإن خط التقارب الأفقي هو $y = 0$

▪ الدالة الأسية
• لتكن $a \neq 0 \ , b > 0 \ , b \neq 1$
الدالة الأسية $y = a \cdot b^x$
• مجال الدالة الأسية هو $R$ ومداها هو $R^+$
• خط التقارب للدالة الأسية $y = b^x + c$ هو $y = c$

▪ الدالة اللوغارتمية
• لتكن $x > 0 \ , b > 0 \ , b \neq 1$
الدالة اللوغارتمية $y = \log_b x$
الصورة الأسية $x = b^y$
• مجال الدالة اللوغارتمية هو $R^+$ ومداها هو $R$
• خط التقارب للدالة اللوغارتمية $y = \log_b x$ هو $x = 0$

• خصائص اللوغارتمات الأساسية
▪ لوغارتم الواحد ▪ $\log_b 1 = 0$
▪ لوغارتم عدد لنفس الأساس ▪ $\log_b b = 1$
▪ لوغارتم قوة لنفس الأساس ▪ $\log_b b^x = x$
▪ قوة لوغارتم لنفس الأساس ▪ $b^{\log_b x} = x$
$e^{\ln x} = x$
▪ خاصية المساواة ▪ $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$

▪ $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$
▪ $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
▪ $\log_b x^n = n \cdot \log_b x$
▪ $\log_b x = \dfrac{\log x}{\log b} = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$
• اللوغارتم العشري : هو اللوغارتم الذي أساسه العدد 10
• اللوغارتم الطبيعي : وأساسه العدد النيبري e
ويكتب $\log_e x$ أو $\ln x$
• مجال الدالة للوغارتمية $y = \log_b f(x)$ هو مجموعة حل المتباينة $f(x) > 0$ ومداها هو $R$

# كثيرات الحدود و دوالها

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية

$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0$ هو :

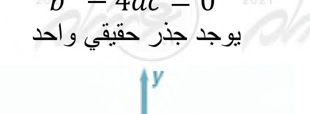
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- يمكن استعمال المميز لتحديد عدد ونوع جذور المعادلة التربيعية

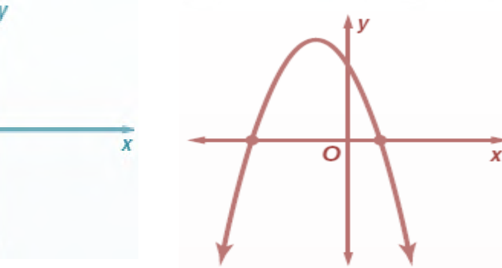
المميز

$\Delta = b^2 - 4ac$

| $b^2 - 4ac > 0$ | $b^2 - 4ac = 0$ | $b^2 - 4ac < 0$ |
|---|---|---|
| يوجد جذران حقيقيان | يوجد جذر حقيقي واحد | يوجد جذران مركبان |







- إذا كان $r_1, r_2$ جذري المعادلة

$ax^2 + bx + c = 0$

$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$

$, r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$

فيمكن كتابة المعادلة بالصورة

$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$

- أصفار الدوال ( نقاط التقاطع مع محور $x$ )

- خصائص الأسس

ضرب القوى

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

قوة القوة

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

قوة ناتج الضرب

$(xy)^a = x^a \cdot y^a$

القوة الصفرية

$x^0 = 1 , x \neq 0$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}$

قسمة القوى

$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

الأس السالب

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^{-a}} = x^a$

قوة ناتج القسمة

$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

- تحليل كثيرات الحدود

مجموع مكعبين

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

الفرق بين مكعبين

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

الفرق بين مربعين

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

المربع الكامل

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

- نظرية الباقي :

باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على $(x - r)$ هو $P(r)$

- نظرية العوامل :

يكون $(x - r)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$

- قانون ديكارت للإشارات :

- عددالأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ هو عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $P(x)$ أو أقل بعدد زوجي

- عددالأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ هو عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي

## المتتابعات والمتسلسلات

▪ المتتابعة الحسابية

▪ أساس المتتابعة : $d = a_n - a_{n-1}$ , $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$

▪ الحد النوني $a_n = a_1 + (n-1)d$

حيث: $a_1$ الحدالأول $d$, أساس المتتابعة $n$ , عدد الحدود

▪ المجموع $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

▪ نظرية ذات الحدين :

$$(a+b)^n = c_0^n a^n \cdot b^0 + c_1^n a^{n-1} \cdot b^1 + c_2^n a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n^n a^0 \cdot b^n$$

▪ المتتابعة الهندسية

▪ الحد النوني $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ حيث

$a_1$ الحدالأول $r$, أساس المتتابعة $n$ , عدد الحدود

▪ أساس المتتابعة : $r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ , $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ,

مع

مراعاة الإشارة

▪ المجموع $S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r^1}{1-r}$

▪ مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية يرمزله بالرمز $S$ حيث $|r| < 1$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ وإذا كان $|r| \geq 1$ فتكون متباعدة

ولا يوجد مجموع

## ▪ الأعداد التخيلية :

▪ **وتعرف الوحدة التخيلية $i$ على أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد $-1$ أو $i = \sqrt{-1}$**

▪ **قوى الوحدة التخيلية $i$**

$$i^1 = i \ , \quad i^2 = -1 \ , \ i^3 = -i \ , \ i^4 = +1$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$









## الاحتمال (١)

- فضاء العينة : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة في تجربة مبدأ العد
- يستخدم في التجارب ذات مرحلتين أو أكثر مثل
- الأحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
- التباديل : هو تنظيم لمجموعة عناصر يكون فيها الترتيب مهم
- المضروب ( $n!$ )

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots\dots\, 2\times 1$$

$$0! = 1$$

- عدد التباديل الخطية لمجموعة من العناصر المختلفة عددها $n$ يساوي $n!$
- يرمزلعدد تباديل $n$ من العناصر المختلفة مأخوذة $r$ في كل مرة بالرمز $_nP_r$ ، $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

- التباديل مع التكرار :عدد التباديل المختلفة لِـ $n$ من العناصر يتكرر فيها عنصر $r_1$ من المرات و عنصرآخر $r_2$ من المرات... $\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k}$
- التباديل الدائرية : عدد التباديل المختلفة لِـ $n$ من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
- إذا رتبت العناصر التي عددها $n$ بالنسبة لنقطة مرجع نعاملها كتباديل خطية وعددها $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times \dots\dots \times 2 \times 1$$

- التوافيق : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون فيها الترتيب غير مهم
- يرمزلعدد توافيق $n$ من العناصرالمختلفة مأخوذة $r$ في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{_nP_r}{r!}$

- الإحتمال الهندسي

| | |
|---|---|
| A B C (قطعة مستقيمة) | B داخل A |
| $p(BC) = \frac{BC \text{ طول القطعة}}{AC \text{ طول القطعة}}$ | $p(B) = \frac{B \text{ مساحةالمنطقة}}{A \text{ مساحةالمنطقة}}$ |

الحوادث المستقلة و الحوادث غير المستقلة

- الحوادث المستقلة : وقوع الأولى لايؤثر على احتمال وقوع الثانية مثل:رمي قطعة نقد ثم إدارة قرص مؤشر

احتمال وقوع حادثتين مستقلتين

$$P(A \text{ و } B)=p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$$

- الحوادث غير المستقلة : وقوع الأولى يؤثر على احتمال وقوع الثانية مثل: سحب كرة من كيس ثم سحب كرة ثانية $p(A) = p(A/B)$

احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين

$$P(A \text{ و } B)=p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A)$$

- الاحتمالات المشروطة : إحتمال وقوع الحادثة $B$ بشرط وقوع $A$ مسبقا $p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

ويكون لحادثتين غير مستقلتين.

الحوادث المتنافية و الحوادث غير المتنافية

- الحوادث المتنافية : لا يمكن وقوعها في الوقت نفسه

$$P(A \text{ أو } B)=p(A\cup B) = p(A) + p(B)$$

- الحوادث غير المتنافية : يوجد بينها نواتج مشتركة

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

- الحادثة المتممة : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



# الأحتمال (٢) والإحصاء

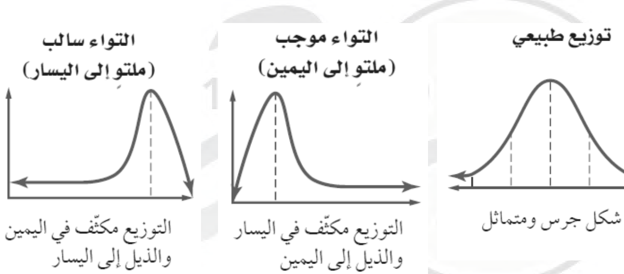
التحليل الإحصائي و مقاييس النزعة المركزية

المتوسط: قسمة مجموع القيم على عددها
يستخدم: عندما لا يوجد قيم متطرفة
الوسيط: القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً
يستخدم: عندما يوجد قيم متطرفة ولا توجد فراغات كبيرة في المنتصف
المنوال: القيم التي تظهر أكثر من غيرها

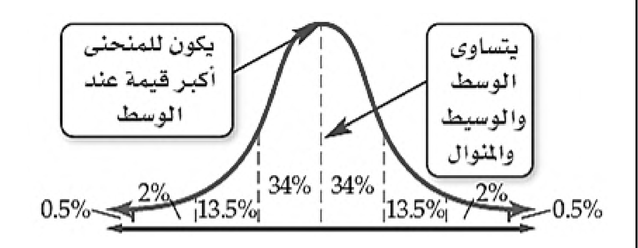
هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة $\mp\frac{1}{\sqrt{n}}$

▪ توزيع ذات الحدين وتحقق :

- يعاد إجراء التجربة لعدد محدد $n$ من المحاولات المستقلة
- لكل محاولة نتيجتان متوقعتان : نجاح $S$ , فشل $F$
- احتمال النجاح $P(S)$ أو $P$
  واحتمال الفشل $P(F)$ أو $q$ , $P = 1 - q$
- يمثل المتغير العشوائي $X$ عدد مرات النجاح في $n$ من المحاولات




▪ القانون التجريبي : يصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه $\mu$ وانحرافه $\sigma$ بالتالي




▪ قانونا الإنحراف المعياري

عينة عدد قيمها (حجمها) $n$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

مجتمع عدد قيمه (حجمه) $n$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

▪ التوزيع الإحتمالي المنفصل : يجب أن يحقق شرطين

① $0 \le P(X) \le 1$ ② $\sum P(X) = 1$

▪ صيغة احتمال ذات الحدين :

احتمال النجاح في $x$ مرة من $n$ من المحاولات المستقلة

في تجربة ذات الحدين هو :

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

▪ المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين :

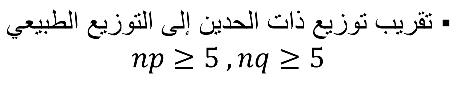
المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

والانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

---

▪ تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع الطبيعي



$np \ge 5 , nq \ge 5$

يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي

بمتوسط $\bar{x} = np$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$

# القطوع المخروطية

## ▪ القطوع المكافئة :-

الصورة القياسية $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

إشارة $c$ موجبة — إشارة $c$ سالبة

الإتجاه : افقي — الإتجاه : أفقي

الرأس: $(h\,,k)$ — الرأس: (h , k)

البؤرة: $(h+c\,,k)$ — البؤرة: (h + c , k)

الدليل: $x = h - c$ — الدليل: x = h − c

محور التماثل $y = k$

طول الوتر البؤري $|4c|$

الصورة القياسية $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

إشارة $c$ موجبة — إشارة $c$ سالبة

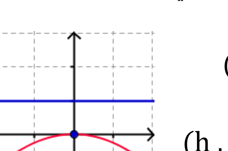
الإتجاه : راسي — الإتجاه : راسي

الرأس: (h , k) — الرأس: (h , k)

البؤرة: (h , k + c) — البؤرة: (h , k + c)

الدليل: y = k − c — الدليل: $y = k - c$

محور التماثل $x = h$ — محور التماثل $x = h$



معادلة الدائرة التي مركزها $(h,k)$ ونصف قطرها $r$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

▪ معادلة المماس عند النقطة $(x_1, y_1)$ هي

$$(y-y_1) = m(x-x_1) \text{ حيث } m = f'(x_1)$$

## القطوع الناقصة :-

الإتجاه : اخترنا المحور الأكبر أفقي (سيني)

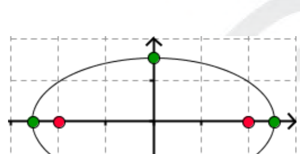
الصورة القياسية :

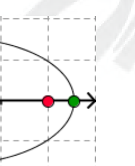
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور الأكبر $2a$

طول المحور الاصغر $2b$

والبعد البؤري $2c$





الرأسان $(h \mp a\,,k)$ — البؤرتان $(h \mp c\,,k)$ — الرأسان المرافقان $(h\,,k \mp b)$

$c^2 = a^2 - b^2$ — الإختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

## القطوع الزائدة :-

الإتجاه : اخترنا حالة المحور القاطع رأسي (صادي)

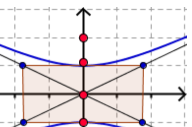
الصورة القياسية :

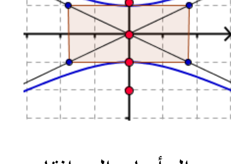
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور القاطع $2a$

طول المحور غيرالمرافق $2b$

والبعد البؤري $2c$





الرأسان $(h\,,k \mp a)$ — البؤرتان $(h\,,k \mp c)$ — الرأسان المرافقان $(h \mp b\,,k)$

خطوط التقارب $(y-k) = \mp\frac{a}{b}(x-h)$

$c^2 = a^2 + b^2$

| نوع القطع المخروطي | | الشرط |
|---|---|---|
| قطع مكافئ | $A \cdot C = 0$ | $B = 0$ |
| قطع ناقص | $A \cdot C > 0$ | $B = 0, A \neq C$ |
| دائرة | $A \cdot C > 0$ | $B = 0, A = C$ |
| قطع زائد | $AC < 0$ | $B = 0$ |

تحديد أنواع القطوع المخروطية

- الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

| نوع القطع المخروطي | المميز |
|---|---|
| قطع مكافئ | $B^2 - 4AC = 0$ |
| قطع ناقص | $B^2 - 4AC < 0 , B \neq 0 , A \neq C$ |
| دائرة | $B^2 - 4AC = 0 \ , B = 0 , A = C$ |
| قطع زائد | $B^2 - 4AC > 0$ |






# حساب المثلثات (١)

- إذا كانت $\theta$ زاوية حادة في مثلث قائم فإن :

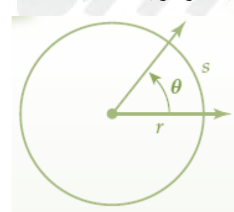
$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

- تحويل قياس الزوايا :
- للتحويل من درجات إلى راديان , نضرب في $\frac{\pi \text{راديان}}{180^\circ}$
- للتحويل من راديان إلى درجات, نضرب في $\frac{180^\circ}{\pi \text{راديان}}$

- طول القوس من الدائرة $(S)$ , المقابل لزاوية مركزية قياسها $(\theta)$ يساوي

$$S = r \cdot \theta$$

حيث $(\theta)$ بالراديان




- مساحة المثلث :

يساوي نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين متجاورين في جيب الزاوية بينهما

المساحة = $\frac{1}{2}ab \cdot \sin C$

- قانون الجيوب :

يستعمل إذاأعطي ضلعين وزاوية غير محصورة أو زاويتين وضلع غير محصور

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

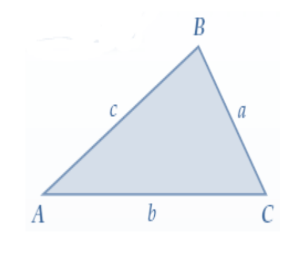
- قانون جيوب التمام :

يستعمل إذا أعطي ضلعين وزاوية محصورة

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cos B$$

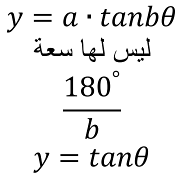
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos C$$

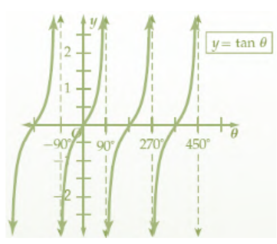
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cos A$$

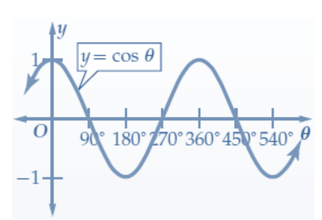



- تمثيل الدوال المثلثية بيانيا في المستوى الإحداثي

| الدالة | $y = a \cdot \sin b\theta$ | $y = a \cdot \cos b\theta$ | $y = a \cdot \tan b\theta$ |
|---|---|---|---|
| السعة | $\lvert a \rvert$ | $\lvert a \rvert$ | ليس لها سعة |
| طول الدورة | $\frac{360^\circ}{b}$ | $\frac{360^\circ}{b}$ | $\frac{180^\circ}{b}$ |
| | $y = \sin\theta$ | $y = \cos\theta$ | $y = \tan\theta$ |














## حساب المثلثات (٢) ( المتطابقات المثلثية )

| | | | |
|---|---|---|---|
| المتطابقات النسبية | | $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ | $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ |
| متطابقات المقلوب | $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$<br>$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ | $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$<br>$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ | $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$<br>$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ |
| متطابقات فيثاغورس<br>متطابقات الزاويتين المتتامتين<br>متطابقات الدوال الزوجية والفردية | $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$<br>$\tan(90-\theta) = \cot\theta$<br>$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ | $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$<br>$\cos(90-\theta) = \sin\theta$<br>$\cos(-\theta) = \cos\theta$ | $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$<br>$\sin(90-\theta) = \cos\theta$<br>$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ |
| متطابقات المجموع والفرق | $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$<br>$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$<br>$\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ | | $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$<br>$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$<br>$\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ |
| متطابقات ضعف الزاوية | $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$<br>$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ | $\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$<br>$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$ | $\tan(2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$ $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ |
| متطابقات نصف الزاوية | $\cos\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$<br>$\sin\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ | $\tan\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ | $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ |
| حل المعادلات المثلثية<br>المعادلة<br>الحلول<br>الحل العام | $\sin\theta = a$<br>$\theta, 180-\theta$<br>$\theta+360n \quad ,n\in Z$ | $\cos\theta = a$<br>$\theta \ , \ -\theta$ | $\tan\theta = a$<br>$\theta, 180+\theta$<br>$\theta+\pi n \quad ,n\in Z$ |

## تطابق المثلثات والعلاقات في مثلث ٣

- نظرية فيثاغورس : في مثلث قائم الزاوية ، مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الأخرين
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية $180°$
- قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزوايتين الداخليتين البعيدتين .
- مسلمات تطابق المثلثات

| | | | |
|---|---|---|---|
| بثلاثة أضــــلاع $SSS$ | بضلع-زاوية-ضلع $SAS$ | بزاوية-ضلع- زاوية $ASA$ | بزاوية-زاوية-ضلع $AAS$ |

- نظريات متباينة المثلث :
  - مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أطول من الضلع الثالث
  - الضلع الأكبر في مثلث يقابل الزاوية التي لها أكبر قياس
  - قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها

## الأعداد القطبية

- إذا كان $n$ عددًا صحيحًا , فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r,\theta)$ بالإحداثيات

$$(-r,\theta+(2n+1)180)\ ,\qquad (r,\theta+360n)$$

- تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية :

إذا كانت $P(r.\theta)$ فإن الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P$ :

أي أن $\quad x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$

$(x,y) = (\,r\cos\theta\,,\quad r\sin\theta\,)$

- القيمة المطلقة للعدد المركب $z=a+bi$ هي :

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

- المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي هي :

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)}$$

- ضرب وقسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية:

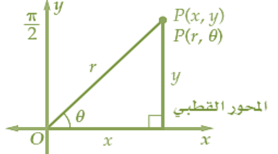
$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \ i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + \ i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

- تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى قطبية :

إذا كانت $P(x,y)$ فإن الإحداثيات القطبية للنقطة $P$ هي $P(r,\theta)$ :

حيث $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$




$$\theta = \begin{cases} tan^{-1}\frac{y}{x} & ,x>0 \\ tan^{-1}\frac{y}{x}+180 & ,x<0 \end{cases}$$

أما إذا كانت $\quad a=0\quad$ فإن

$\theta = \frac{\pi}{2}$ عندما $b>0 \qquad\qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$ عندما $b<0$

- الجذور النونية : $\quad z = r(\cos\theta + \ i\sin\theta)$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \ i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $\quad k = 0,1,2,\ldots\ldots.,(n-1)$

- الصورة القطبية للعدد المركب $z=a+bi$ هي :

$z = r(\ \cos\theta + \ i\sin\theta\,)\qquad$ حيث

- نظرية دي موافر

$$z^n = r^n(\ \cos n\theta + \ i\sin n\theta\,)$$



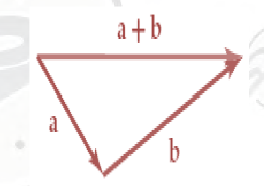


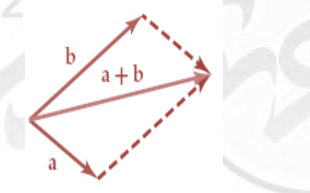

# المتجهات

- اتجاه المتجه : يحدد اتجاه المتجه باستعمال

1/ الإتجاه الأفقي ويبدأ من نقطة الأصل مع محور $x$ الموجب وعكس عقارب الساعة مثل ( $30^{\circ}$ مع الأفقي )

2/ الإتجاه الربعي وزاويته $\varphi$ فاي ، $0^{\circ} < \varphi < 90^{\circ}$ شرق أو غرب الخط الرأسي مثل ( $E\ 30^{\circ}\ S$ )




3/ الإتجاه الحقيقي ويبدأ الشمال مع عقارب الساعة ويقاس بثلاثة أرقام مثل $025^{0}$

- إذا كان لدينا المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته $A(x_1, y_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2)$ فإن

- الصورة الإحداثية للمتجه هي

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

- متجه الوحدة u في إتجاه متجه v هو المتجه على طول المتجه

$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} = \frac{1}{|\mathrm{v}|}\mathrm{v}$ حيث $|\mathrm{u}| = 1$

- إذا كان المتجه v في الصورة الإحداثية $\mathrm{v} = \langle a, b \rangle$ فإن

طول المتجه $|\mathrm{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة i , j هي

$$\mathrm{v} = ai + bj$$

لإيجاد زاوية اتجاه المتجه مع الإتجاه الموجب لمحور $x$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & , x > 0 \\ \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180 & , x < 0 \end{cases}$$

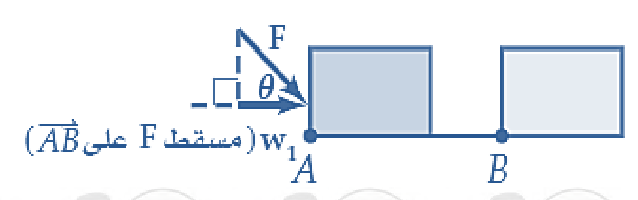
- إذا كانت $\theta$ هي الزاوية بين متجهين غير الصفريين u , v

1/ $\cos\theta = \frac{\mathrm{v} \cdot \mathrm{u}}{|\mathrm{u}| \times |\mathrm{v}|}$

2/ $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{u}| \times |\mathrm{v}| \cos\theta$

- الشغل= القوة المؤثرة × المسافة التي تحركها الجسم

$$\mathrm{w} = |\mathrm{w}_1| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$




- إذا ضرب متجه في عدد سالب فإنه يعكس اتجاهه , فمثلا $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

- مركبتي متجه :

1/ المركبة الرأسية $|y| = r\sin\theta$

2/ المركبة الأفقية $|x| = r\cos\theta$

- طول المتجه هو

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

الضرب الداخلي للمتجهين

$$a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

- يكون المتجهين متعامدين , إذا وفقط إذا كان $a \bullet b = 0$

- وتعطى نقطة المنتصف $M$ لـ $\overrightarrow{AB}$ بالقانون

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

- الضرب الإتجاهي للمتجهين $a, b$ هو $a \times b =$ ويكون عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين .

- مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي $a, b$ ضلعان متجاوران فيه $|a \times b| =$

- حجم متوازي السطوح هو

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad c \bullet (a \times b) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

## النهايات والإشتقاق

▪ تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ موجودة إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين أي

$$\lim_{x\to c^{+}} f(x) = \lim_{x\to c^{-}} f(x) = L$$

ويكون $\lim_{x\to c} f(x) = L$

▪ نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب ما لا نهاية هي الصفر

أي $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

▪ نهاية الدوال الكسرية عند موجب أو سالب ما لا نهاية هو نهاية أكبر قوة في البسط و أكبر قوة في المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

حساب النهايات عند المالانهاية

▪ إذا كان $n$ عدد صحيح موجب فإن

▪ $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$

▪ $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ إذا كان $n$ عدد زوجي

▪ $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان $n$ عدد فردي

▪ نهاية دالة كثيرة حدود

هي $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

نأخذ النهاية للحد الذي له الأس الأكبر

▪ السرعة المتوسطة :

في الفترة الزمنية من $a$ إلى $b$

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

▪ السرعة المتجهة اللحظية :

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f\,`(t)$$

المشتقات والتكامل

▪ يرمز لمشتقة $y = f(x)$ بالرموز $y',\ f'(x)\ ,\frac{dy}{dx}$

▪ مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)\cdot g(x) + f\,(x)\cdot g'(x)$$

▪ مشتقة القسمة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f\,(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f\,`(x)$$

▪ إذا كانت $v(t)$ تمثل دالة السرعة المتجهة اللحظية فإن دالة المسافة $s(t)$عند الزمن $t$ هي $s(t) = \int v(t)\,dt$

▪ الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما (a متر) , من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^a cx\,dx =$ حيث $c$ عدد ثابت





